

## 圓面積

(本專題靈感來自高雄市翹程式網 <http://khcode.m-school.tw/> 『不定數量圓面積的交集與聯集』)

圓面積大家都知道是  $r*r*\pi$ ，此公式有很多數學家用不同方法證明，本例則用電腦愚公移山的精神求解，我將一個半徑為 1 的圓，圓心放在(0,0),然後在 (-1.-1),(1,1) 矩形之間，以 0.1 的距離畫線，將此矩形分成每塊 0.1\*0.1 的正方形，那這一正方形便有 200\*200 的小正方形，若此小正方形與原點的距離小於等於 1，那此塊小正方形便是屬於圓，我們累加這些滿足圓的小正方形個數（每個小正方形面積是 0.01），就可以得到圓面積，此演算法的 C 語言程式如下：

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
int main()
{
    double dx=0.1;
    int sum=0;
    for (double i=-1;i<=1;i=i+dx){
        for (double j=-1;j<=1;j=j+dx){
            if (i*i+j*j<=1)
                sum=sum+1;
        }
    }
    printf("%f",sum*(dx*dx));//3.15
    return 0;
}
```

同理，若將此矩形以 0.01 的大小切割，那精密度就會提高，請讀者自己將以上 dx 改為 0.01。以下則是 Python 的程式，因為 Python 的 for 迴圈每次增量只能整數，所以我就先將 range 放大 s 倍，最後算面積再縮小就好（除以 s,面積就除以 s\*s）。

```
dx=0.1
s=10
sum=0
for i in range(-1*s,1*s):
    for j in range (-1*s,1*s):
        if (i*i+j*j)/(s*s)<=1:
            sum=sum+1
print(sum/(s*s))
```

### 圓交集與聯集面積

兩個圓交集或聯集面積若要用幾何的方法求解，那就很難了，但若將幾何問題數位化，用以上愚公移山的暴力法，方法就簡單了，以下是兩個圓面積的交集與聯集寫法。也就是檢查每一個小方塊是否同時在兩個圓內，就是交集面積。

```
#include <iostream>
using namespace std;
/* run this program using the console pauser or add your own getch,
system("pause") or input loop */
int main(int argc, char** argv) {
    int x1=18,y1=22,r1=7;//圓心(18,22),半徑 7
    int x2=17,y2=28,r2=8;//圓心(17,28),半徑 8
    double dx=0.1;
    int s=10;
    int a=0;
    for (double i=x2-r2;i<=x2+r2;i=i+dx){
        for (double j=y2-r2;j<=y2+r2;j=j+dx){
            if (((i-x2)*(i-x2)+(j-y2)*(j-y2))<=8*8) && (((i-x1)*(i-x1)+(j-y1)*(j-
y1))<=7*7))
                a=a+1;//交集個數
        }
    }
    cout<<a/(s*s);//交集面積
    cout<<8*8*3.14+7*7*3.14-a/(s*s);//267.82，聯集面積
    return 0;
}
```

### 多個圓的交集與聯集

以上只有兩個圓的交集，還可以直接比對每一小塊是否同時在兩個圓內，但若是三個或四個圓的交集與聯集呢，或程式執行階段才知道圓的個數，那就只好先將每一個圓的小方塊蒐集起來，然後求其交集或聯集，Python 程式如下：

```
def aa(x,y,r):
    a=[]
    dx=0.1
    s=10
    for i in range((x-r)*s,(x+r)*s):
        for j in range ((y-r)*s,(y+r)*s):
            if ((i-x*s)*(i-x*s)+(j-y*s)*(j-y*s))/(s*s) <=r*r:
```

```

a.append(999*i+j*1.2)#蒐集起來
return (a)
x1=18;y1=22;r1=7
x2=17;y2=28;r2=8
a1=aa(x1,y1,r1)
#a1=aa(1,3,2)
print(a1)
print(len(a1))
a2=aa(x2,y2,r2)
b1=set(a1)
print(len(b1))
b2=set(a2)
print(len(b2))
b=(b1 | b2)
print(len(b))

```

#### 程式說明

`append(999*i+j*1.2)`

因為 Python 有集合的聯集與交集運算子，所以本題用 Python 較快，其次原來小方塊的座標是(x,y)，但是 Python 的集合僅能單一元素，所以我就將(x,y)轉為單一元素，為了避免座標的對稱問題轉為相同的元素,例如 (18,19) 與 (19,18) 轉為單一元素，很容易產生相同的元素，所以多次試驗後將轉換公式調整為  $999*i+j*1.2$ 。

#### 延伸練習

- 1、 以上僅為兩個圓的交集與聯集，請調整為圓的個數可為 2 到 5 個。例如，測試資料如下：

```

n=3
2,3,2 //代表(x,y),r
0,1,4
-2,4,3
n=4
2,3,2 //代表(x,y),r
0,1,4
-2,4,3
3,4,5

```

- 2、 請寫一程式，可以求得任意兩個矩形的交集面積。測試資料如下：  
0,0,2,2,(左下角座標，右上角座標)

-1,-1,1,1

3、請寫一程式，可以求得任意矩形與圓的交集面積。測試資料如下：

0,0,2,2,

0,0,1 (代表 x,y,r)

三角形面積

以上僅為圓的交集與聯集，題目若改為幾何圖形還有三角形、或任意凸四邊形、或任意矩形呢？

前面是使用(x,y)座標小於等於 r\*r，判斷小正方形是否在圓內，那如何判斷任意座標是否在三角形內呢？我的方法是 s 點若在三角形 ABC 內，則

(SAB 面積+SBA 面積+SCA 面積) 一定等於 ABC 的面積。

所以程式如下：

```
def aa(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
    return abs(x1*y2+x2*y3+x3*y1-x2*y1-x3*y2-x1*y3)
dx=0.01
s=100
sum=0
x1=0;y1=0
x2=2;y2=0
x3=3;y3=3
a=aa(x1*s,y1*s,x2*s,y2*s,x3*s,y3*s)
print (a)
for i in range(0*s,3*s):
    for j in range (0*s,3*s):
        a1=aa(i,j,x1*s,y1*s,x2*s,y2*s)
        a2=aa(i,j,x1*s,y1*s,x3*s,y3*s)
        a3=aa(i,j,x2*s,y2*s,x3*s,y3*s)
        print(a1+a2+a3)
        if a==(a1+a2+a3) :
            sum=sum+1
    print()
print(sum/(s*s))
```

以上式理想狀況，若是任意三角形則 x 與 y 要從 3 點裡面取最小的到最大的。

```
def aa(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
    return abs(x1*y2+x2*y3+x3*y1-x2*y1-x3*y2-x1*y3)
dx=0.01
s=100
sum=0
```

```

x1=0;y1=0
x2=2;y2=0
x3=3;y3=3
a=aa(x1*s,y1*s,x2*s,y2*s,x3*s,y3*s)
print (a)
for i in range(min(x1,x2,x3)*s,max(x1,x2,x3)*s):
    for j in range (min(y1,y2,y3)*s,max(y1,y2,y3)*s):
        a1=aa(i,j,x1*s,y1*s,x2*s,y2*s)
        a2=aa(i,j,x1*s,y1*s,x3*s,y3*s)
        a3=aa(i,j,x2*s,y2*s,x3*s,y3*s)
        print(a1+a2+a3)
        if a==(a1+a2+a3) :
            sum=sum+1
    print()
print(sum/(s*s))

```

以上公式可推廣到任意凸多邊形。

三角形面積修正

因為三角形和圓形稍微不同，三角形的小正方形(x,y)很容易落在線上，所以面積誤差較大，經多次試驗，其機率大約 1/3，所以面積修正如下：

```

def aa(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
    return abs(x1*y2+x2*y3+x3*y1-x2*y1-x3*y2-x1*y3)
dx=0.1
s=10
sum=0
x1=0;y1=0
x2=3;y2=0
x3=3;y3=3
a=aa(x1*s,y1*s,x2*s,y2*s,x3*s,y3*s)
print (a/(s*s*2))
for i in range(0*s,3*s):
    for j in range (0*s,3*s):
        a1=aa(i,j,x1*s,y1*s,x2*s,y2*s)
        a2=aa(i,j,x1*s,y1*s,x3*s,y3*s)
        a3=aa(i,j,x2*s,y2*s,x3*s,y3*s)
        #print(a1+a2+a3,end=',')
        if a==(a1+a2+a3) :
            sum=sum+1
        if a1==0 or a2==0 or a3==0:

```

```
sum=sum-0.33
#print()
print(sum/(s*s))
```

### 延伸練習

- 4、請寫一個程式，可以求得任意三角形與任意圓形的交集面積。測試資料如下：  
0,0,3,0,3,3//代表三角形的3個點  
0,0,2//代表(x,y),r
- 5、請寫一個程式，可以求的任意矩形與圓的交集面積。測試資料如下：  
0,0,3,0,3,3,0,3//代表矩形的四個點  
0,0,2//代表(x,y),r
- 6、請寫一個程式，可以求的任意四邊形與圓的交集面積。測試資料如下：  
0,0,3,3,3,0,0,-3 //代表4邊形的四個點  
0,0,2 //代表(x,y),r